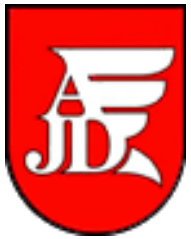


Wybrane elementy informatyki - wykład 2

Algorytmy. Przegląd algorytmów istotnych z punktu widzenia informatyki

dr Marcin Ziółkowski

Instytut Matematyki i Informatyki
Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie

26 marca 2017 r.

POJĘCIE ALGORYTMU

ALGORYTM

Algorytm - to sposób rozwiązania danego zagadnienia (problemu). W informatyce oraz innych naukach ścisłych wymagamy, żeby sposób ten rozwiązywał dany problem w skończonej ilości kroków i w skończonym czasie i używał skończonej ilości zasobów pamięci. Zatem algorytm to najczęściej lista operacji, które prowadzą do rozwiązania danego problemu. Lista jest tutaj rozumiana jako ciąg, więc w algorytmie ważne są nie tylko operacje prowadzące do rozwiązania tego problemu, ale także ich kolejność.

Pierwsze poważne algorytmy były tworzone w celu rozwiązywania problemów matematycznych np. algorytm znajdowania przybliżeń pierwiastków kwadratowych czy algorytm Euklidesa znajdowania największego wspólnego dzielnika dwóch dodatnich liczb naturalnych.

SPOSOBY ZAPISU ALGORYTMÓW

Są rózne sposoby zapisu algorytmów:

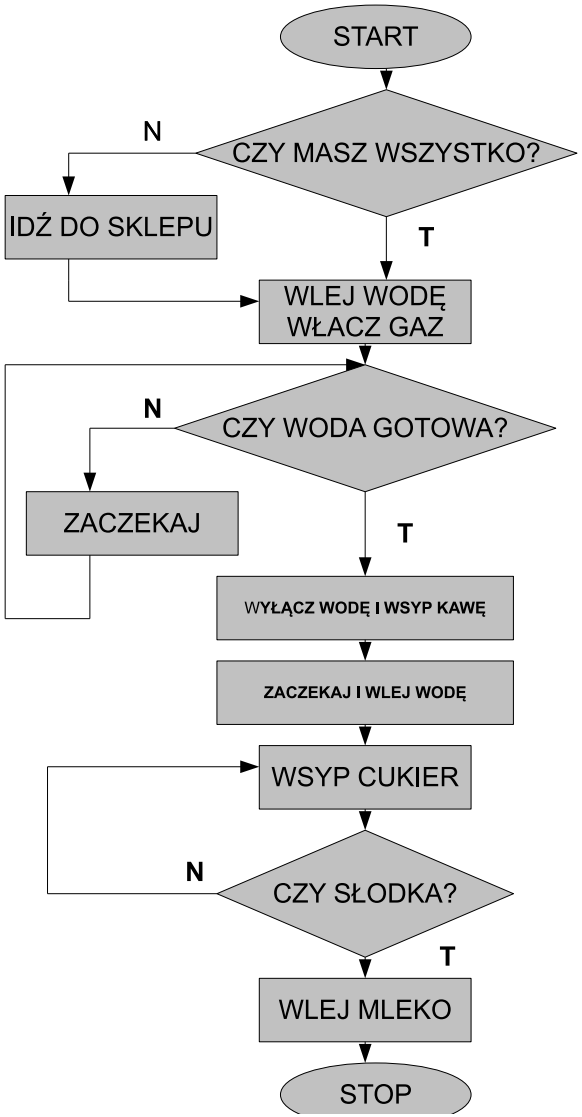
1. Lista kroków - podajemy ciąg operacji, które prowadzą od danych wejściowych do żądanego rezultatu
2. Pseudokod - ogólny nieistniejący sztuczny język programowania, w którym zapisujemy algorytm
3. **Schematy blokowe** - układ różnych figur geometrycznych oraz strzałek łączących te figury, które łącznie pokazują operacje oraz ich kolejność - najbardziej uniwersalny sposób zapisu algorytmów

Algorytm jest pierwszym krokiem przy rozwiązywaniu różnych zagadnień informatycznych. Na jego podstawie tworzy się potem program w wybranym języku programowania.

PRZYKŁADY ALGORYTMÓW - lista kroków - ALGORYTM PRZYGOTOWYWANIA KAWY

1. Wejdź do kuchni i sprawdź czy masz kawę, cukier i mleko. Jeżeli tak - idź do punktu 3, jeśli nie - idż do punktu 2
2. Idź do sklepu, kup brakujące produkty i idź do punktu 3
3. Wlej do czajnika wodę i włącz gaz
4. Sprawdź czy woda się zagotowała, jeżeli tak - idź do punktu 6, jeżeli nie - idź do punktu 5
5. Zaczekaj chwilę i idź do punktu 4
6. Wyłącz wodę i wsyp kawę do kubka
7. Poczekaj chwileczkę i wlej wodę do kubka
8. Przykryj kubek i poczekaj chwileczkę
9. Wsyp odrobinę cukru do kawy
10. Spróbuj kawę, jeżeli jest wystarczająco słodka idź do punktu 11, jeżeli nie idź do punktu 9
11. Wlej odrobine mleka i zamieszaj

ALGORYTM PRZYGOTOWYWANIA KAWY- schemat blokowy



PODSTAWOWE RODZAJE ALGORYTMÓW

1. ALGORYTM SEKWENCYJNY - wykonujemy po kolei wszystkie operacje bezwarunkowo, w takim algorytmie nie może być operacji podjęcia decyzji oraz powtarzania operacji
2. ALGORYTM ROZGAŁĘZIONY - algorytm, w którym w zależności od spełnienia pewnego warunku wykonujemy różne operacje, algorytm taki zawiera przynajmniej jedną operację podjęcia decyzji (instrukcję warunkową)
3. ALGORYTM ITERACYJNY - algorytm, w którym występuje wielokrotne powtarzanie tych samych operacji, w algorytmie takim występują tzw. pętle czyli ciągi operacji, które są wykonywane wielokrotnie

Algorytmy tworzymy po to, aby "nauczyć" komputer rozwiązywać dany problem. Przekazujemy maszynie nasz tok myślenia, aby potem ją wykorzystać w celu szybkiego wykonywania żmudnych obliczeń w oparciu o duże szybkości procesorów i duże zasoby pamięci.

ZASADY TWORZENIA SCHEMATÓW BLOKOWYCH

W schematach blokowych używamy figur geometrycznych oraz połączeń między nimi. Każdy schemat zaczyna się od jednego klocka startowego i kończy się przynajmniej jednym klockiem końcowym.
Oto podstawowe klocki używane przy tworzeniu algorytmów i operacje, które mogą być wpisane w dane klocki:

1. ELIPSY - są zarezerwowane dla klocków startowych i końcowych - START ORAZ STOP
2. PROSTOKĄTY - są zarezerowane na pojedyncze lub wielokrotne operacje wykonywane na danych, w prostokątach są zapisywane operacje podstawienia oraz podstawowych działań arytmetycznych
3. RÓWNOLEGŁOBOKI - są używane do wprowadzania danych oraz wyprowadzania wyników częściowych i końcowych
4. ROMBY - są używane dla bloków decyzyjnych - instrukcji wyboru, w algorytmie muszą być zawsze rozważane obie drogi zależne od dokonanego wyboru

ZASADY TWORZENIA SCHEMATÓW BLOKOWYCH

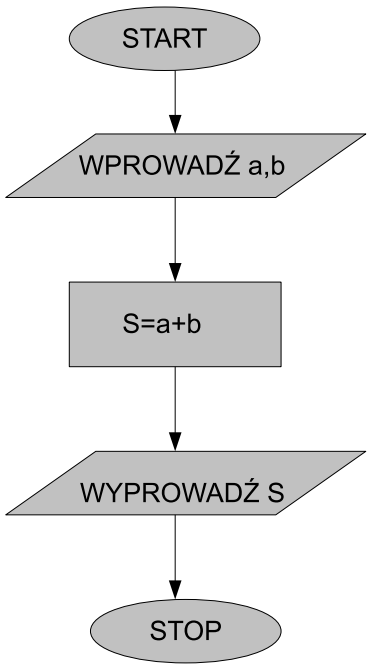
Zauważmy również że bloki decyzyjne będą miały również zastosowanie w przypadku realizacji tzw. pętli czyli ciągów instrukcji wykonywanych wielokrotnie w zależności od spełnienia pewnego warunku nazywanego WARUNKIEM KONTYNUACJI PĘTLI.
Przedstawimy teraz wiele przykładów schematów blokowych.

PRZYKŁAD ALGORYTMU SEKWENCYJNEGO

PRZYKŁAD 1

Przedstawmy algorytm dodawania dwóch liczb naturalnych.
Specyfikacja problemu:
dane wejściowe: dwie liczby naturalne a, b
dane wyjściowe, rezultat: suma liczb a oraz b

Oto schemat blokowy realizujący dane zagadnienie.

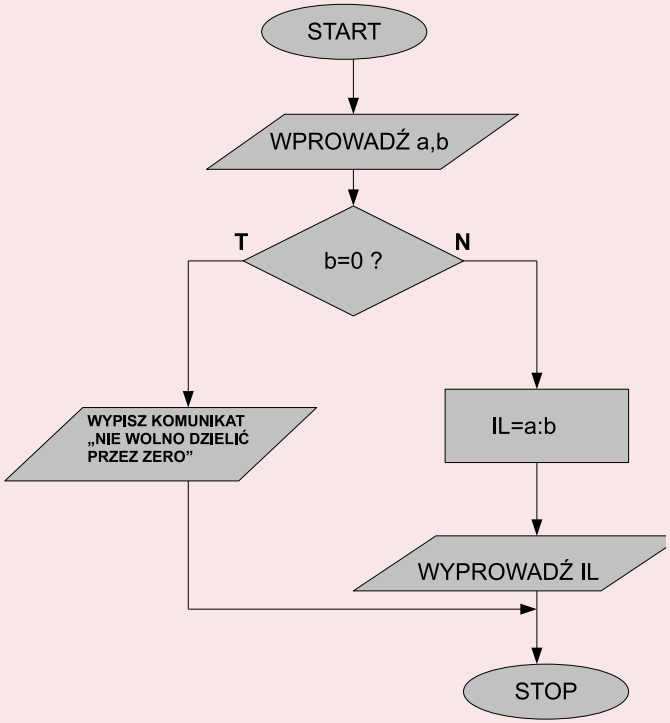


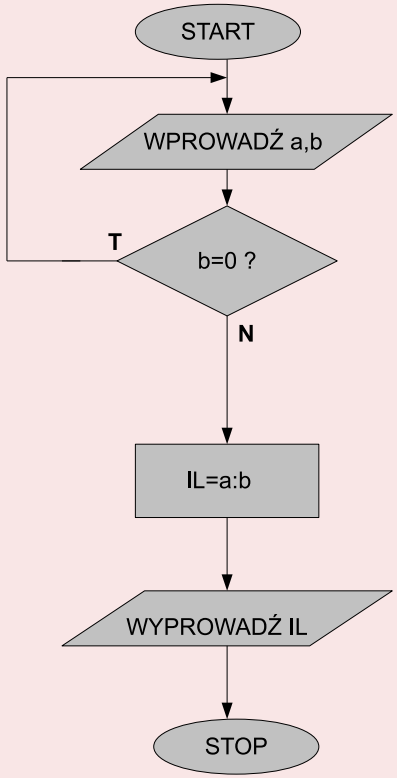
PRZYKŁAD 2

Przedstawmy algorytm dzielenia dwóch liczb rzeczywistych.
Specyfikacja problemu:
dane wejściowe: dwie liczby rzeczywiste a, b
dane wyjściowe, rezultat: iloraz liczb a oraz b

Ponieważ mamy wykonać dzielenie, druga z liczb nie może być równa zero.
Oto schematy blokowe realizujące dane zagadnienie. Drugi z algorytmów jest juz algorytmem zawierającym pętlę.

ALGORYTM DZIELENIA





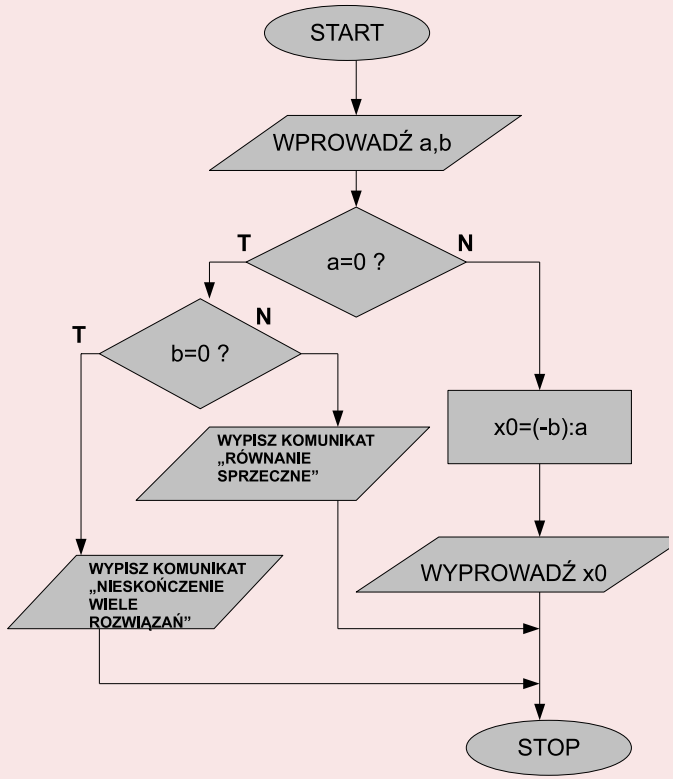
PRZYKŁAD 3

Przedstawmy algorytm rozwiązywania równania liniowego $ax + b = 0$.
Specyfikacja problemu:
dane wejściowe: dwie liczby rzeczywiste a, b - współczynniki równania
dane wyjściowe, rezultat: rozwiązanie równania
Przypomnijmy, że są możliwe trzy sytuacje:

- Gdy $a \neq 0$ - wówczas równanie ma jedno rozwiązanie $x_0 = -\frac{b}{a}$
- Gdy $a = 0$ oraz $b = 0$ - równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań
- Gdy $a = 0$ oraz $b \neq 0$ - równanie jest sprzeczne

Wystarczy wykorzystać dwa bloki decyzyjne, aby zbudować algorytm rozwiązujący ten problem.

ALGORYTM ROZWIĄZYWANIA RÓWNANIA LINIOWEGO



ALGORYTMY ITERACYJNE

Prawdziwą potęgą jest stosowanie wielokrotnych powtórzeń tych samych ciągów operacji czyli stosowanie tzw. PĘTLI ITERACYJNYCH. Z użyciem pętli można rozwiązywać nawet bardzo skomplikowane problemy.
W algorytmach mamy do czynienia z dwoma rodzajami pętli:

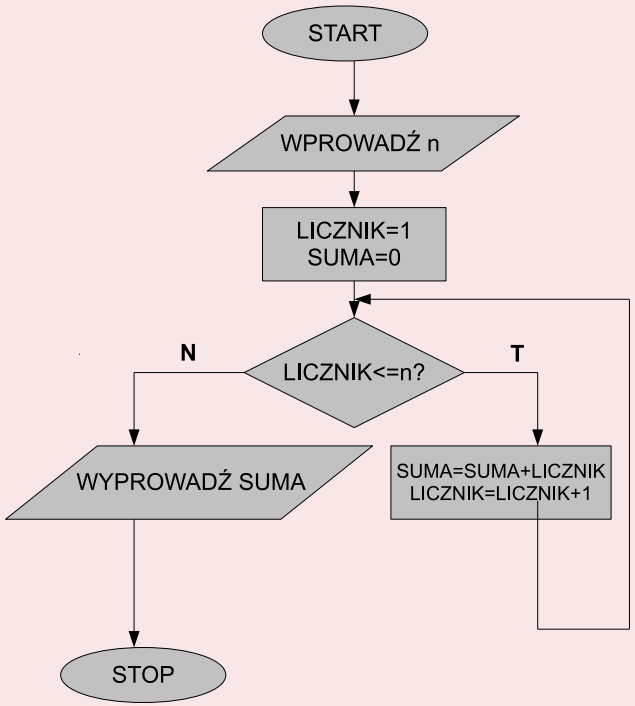
1. Pętle, dla których wiadoma jest liczba powtórzeń ciągu operacji - w takich pętlach wprowadzamy licznik, który zlicza ilość powtórzeń pętli
2. Pętle, dla których liczba powtórzeń ciągu operacji jest nieznana - takie pętle kończą się w sytuacji niespełnienia danego warunku kontynuacji pętli niezależnego od liczby powtórzeń

ALGORYTM OBLICZANIA SUMY $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$

dane wejściowe: n - liczba naturalna dodatnia wprowadzona przez użytkownika

dane wyjściowe: suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$

liczba powtórzeń pętli: n

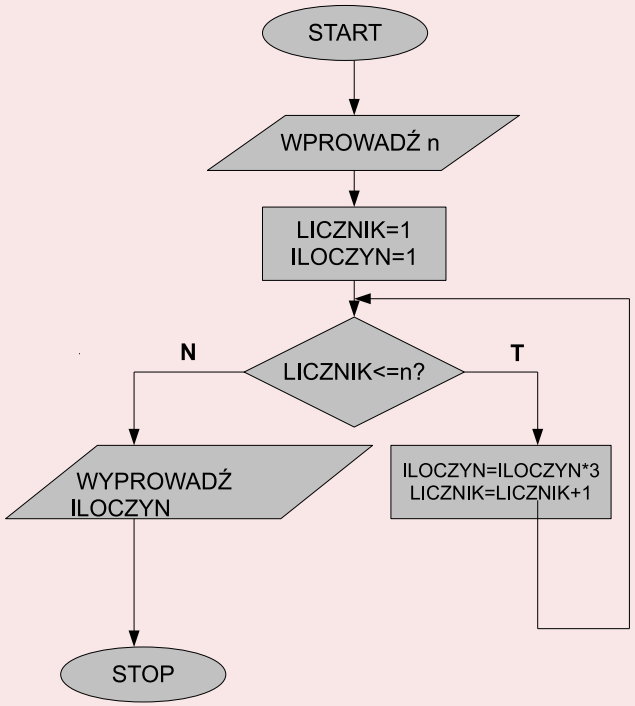


ALGORYTM OBLICZANIA POTĘGI 3^n

dane wejściowe: n - liczba naturalna wprowadzona przez użytkownika

dane wyjściowe: potęga 3^n

liczba powtórzeń pętli: n

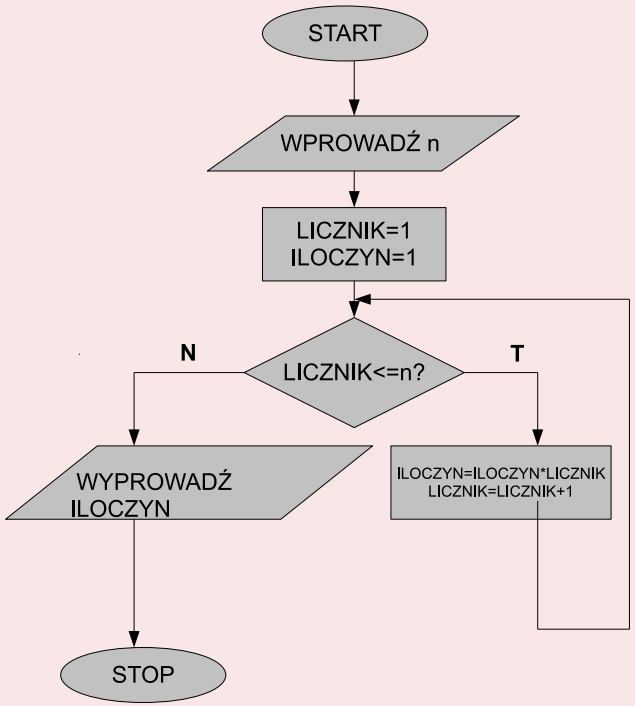


ALGORYTM OBLICZANIA SILNI

dane wejściowe: n - liczba naturalna wprowadzona przez użytkownika

dane wyjściowe: liczba $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

liczba powtórzeń pętli: n

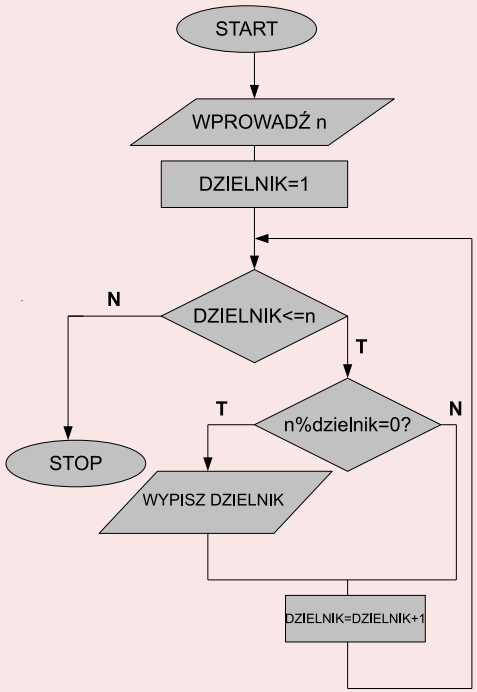


ALGORYTM WYPISYWANIA DZIELNIKÓW

dane wejściowe: *n* - liczba naturalna dodatnia wprowadzona przez użytkownika

dane wyjściowe: dzielniki liczby n

liczba powtórzeń pętli: *n*

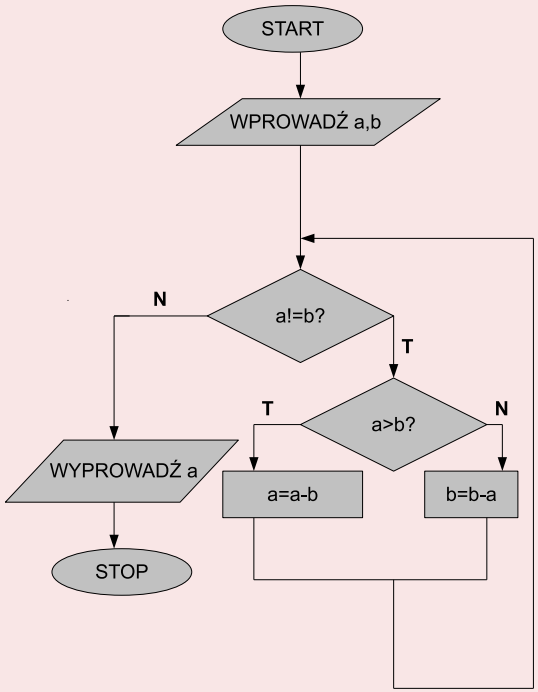


ALGORYTM EUKLIDESA OBLICZANIA NWD

dane wejściowe: a, b - liczby naturalne dodatnie wprowadzone przez użytkownika

dane wyjściowe: NWD(a,b) (największy wspólny dzielnik liczb a,b)

liczba powtórzeń pętli: nieznana

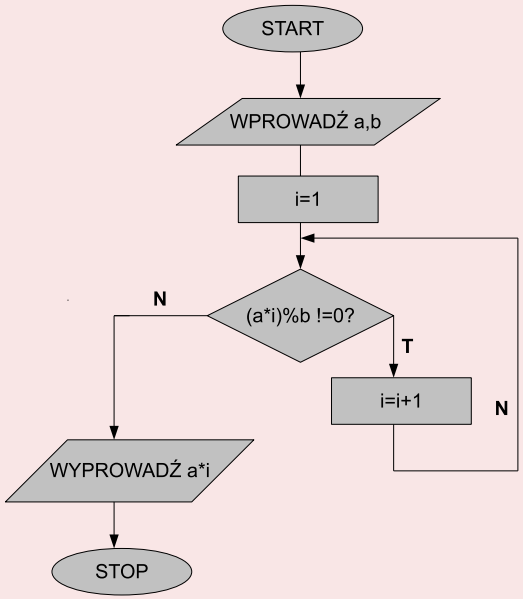


ALGORYTM OBLICZANIA NWW

dane wejściowe: a, b - liczby naturalne dodatnie wprowadzone przez użytkownika

dane wyjściowe: NWW(a,b) (najmniejsza wspólna wielokrotność liczb a,b)

liczba powtórzeń pętli: nieznana

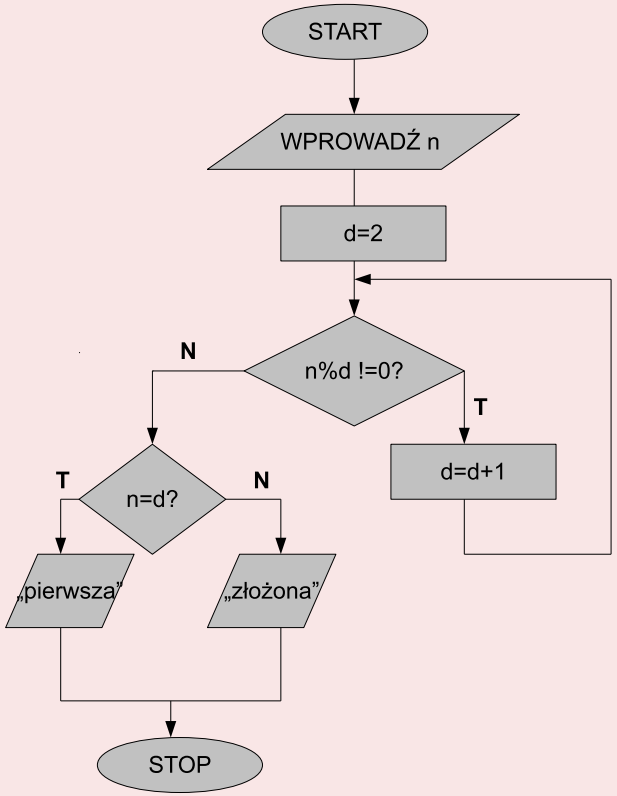


ALGORYTM SPRAWDZANIA CZY LICZBA JEST PIERWSZA

dane wejściowe: n - liczba naturalna (większa od 1) wprowadzona przez użytkownika

dane wyjściowe: informacja o pierwszości liczby

liczba powtórzeń pętli: nieznana



PROBLEM SORTOWANIA

Problem sortowania (porządkowania) danych jest jednym z najważniejszych i najbardziej praktycznych problemów w informatyce. W dzisiejszych czasach, gdy na serwerach są przechowywane bardzo duże ilości różnego rodzaju danych, ich porządkowanie jest bardzo ważnym zadaniem. Z sortowania korzystamy na każdym niemal kroku - przeglądarki internetowe segregują dane w porządku leksykograficznym, aby łatwiej było znaleźć interesującą użytkownika frazę. W uporządkowanym ciągu łatwiej bowiem znaleźć liczbę, literę lub słowo. Niektóre inne algorytmy (np. wyszukiwanie binarne, znajdowanie mediany) wymagają, aby dane wejściowe były już uporządkowane. W ogólnym przypadku sortowanie ciągu liczb polega na znalezieniu takiej permutacji tego ciągu, aby liczby były ułożone w kolejności niemalejącej lub nierosnącej.

SORTOWANIE TRZECH ORAZ CZTERECH LICZB

Zacznijmy od sortowania trójki liczb: a, b, c. Najłatwiejszym sposobem jest znalezienie na początku liczby, która jest nie większa od pozostałych liczb (minimum), a następnie porównanie dwóch pozostałych liczb. Jest to szczególny przypadek **sortowania przez wybieranie.** Innym pomysłem jest porównywanie liczb parami: a porównujemy z b i w razie potrzeby zamieniamy je miejscami. Następnie drugą liczbę w otrzymanym ciągu porównujemy z trzecią i znów w razie potrzeby zamieniamy je miejscami. Wreszcie wracamy do pierwszej pary liczb i w razie potrzeby zamieniamy jej miejscami. Ten sposób jest bardziej efektywny, wykorzystujemy tu tylko 3 porównania. Jest to szczególny przypadek **sortowania bąbelkowego.**

Rozważmy teraz czwórkę liczb: a, b, c, d. Sposób na uporządkowanie tych liczb może być następujący: Porównujemy a z b oraz c z d. Następnie porównujemy mniejsze liczby w tych dwóch parach, otrzymując $\min\{a, b, c, d\}$ oraz większe liczby w tych dwóch parach, otrzymując $\max\{a, b, c, d\}$. W dalszej kolejności porównujemy dwie ostatnie liczby (tą, która w pierwszym porównaniu nie okazała się minimalną oraz tą, która w drugim porównaniu nie okazała się maksymalną).

SORTOWANIE WIĘKSZEJ ILOŚCI LICZB

Już dla pięciu liczb algorytm sortowania jest znacznie bardziej skomplikowany. Jest jasne, że dla dużej ilości danych nie można w taki sposób ich porządkować. Liczba porównań i podstawień byłaby bardzo duża. Poza tym dla dużej liczby danych wygodniej używać tablic (list). Istnieje wiele lepszych i gorszych, łatwiejszych i bardziej skomplikowanych metod sortowania. Na tym wykładzie chcemy zaprezentować najprostsze (ale niestety nieefektywne dla dużej liczby danych) algorytmy, które oprócz prostoty łączy podobna złożoność obliczeniowa rzędu $o(n^2)$. Zaprezentujemy:

1. SORTOWANIE PRZEZ WYBIERANIE
2. SORTOWANIE PRZEZ WSTAWIANIE
3. SORTOWANIE BĄBELKOWE

SORTOWANIE PRZEZ WYBIERANIE

Idea sortowania przez wybieranie jest następująca: Z początkowego ciągu liczb wybieramy element najmniejszy i w razie konieczności zamieniamy go miejscami z pierwszym elementem. Następnie ze wszystkich pozostałych liczb, za wyjątkiem pierwszej znowu wybieramy minimalną i zamieniamy ją miejscami z drugim elementem. W dalszej kolejności ze wszystkich pozostałych liczb poza pierwszymi dwoma wybieramy minimalną i zamieniamy ją z trzecim elementem itd. Algorytm kończymy w momencie, gdy dojdziemy do końca ciągu, a w zasadzie, gdy do szukania minimum pozostanie dwuelementowy podciąg.

SORTOWANIE PRZEZ WYBIERANIE

Uporządkujmy następujący ciąg: $2, 8, 6, 4, 9, 1, 7, 3$ Oto kolejne kroki:

$$1, 8, 6, 4, 9, 2, 7, 3$$

$$1, 2, 6, 4, 9, 8, 7, 3$$

$$1, 2, 3, 4, 9, 8, 7, 6$$

$$1, 2, 3, 4, 9, 8, 7, 6$$

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 7, 9$$

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$$

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$$

SORTOWANIE PRZEZ WSTAWIANIE

Sortowanie przez wstawianie przypomina układanie kart w trakcie gry. Przesuwamy wówczas karty na odpowiednie miejsce. Dla liczb będzie to wyglądać następująco: Pierwszą liczbę pozostawiamy bez zmian i traktujemy ją jako uporządkowany już podciąg danego ciągu liczb. Następnie przesuwamy (przez zamianę parami) drugi element ciągu na jego odpowiednie miejsce, uzyskując uporządkowaną dwójkę liczb. Dalej znów przesuwamy kolejny element ciągu (trzeci) i uzyskujemy uporządkowaną trójkę itd. W efekcie uzyskujemy uporządkowany ciąg liczbowy.

SORTOWANIE PRZEZ WSTAWIANIE

Uporządkujmy następujący ciąg: $2, 8, 6, 4, 9, 1, 7, 3$. Oto kolejne kroki:

$$2, 8, 6, 4, 9, 1, 7, 3$$

$$2, 6, 8, 4, 9, 1, 7, 3$$

$$2, 4, 6, 8, 9, 1, 7, 3$$

$$2, 4, 6, 8, 9, 1, 7, 3$$

$$1, 2, 4, 6, 8, 9, 7, 3$$

$$1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 3$$

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$$

SORTOWANIE BĄBELKOWE

Sortowanie bąbelkowe polega na zamianie parami tylko sąsiednich elementów ciągu liczbowego. Najlepiej pokazać tą ideę na porządkowaniu monet o różnych nominałach. Idąc od początku ciągu zamieniamy miejscami te monety dla których nominał monety znajdującej się z lewej strony jest większy od nominału monety znajdującej się z prawej strony.

ALGORYTMY SZKOLNE

Zapoznamy się teraz z najważniejszymi algorytmami wykorzystywanymi na lekcjach matematyki oraz informatyki oraz przedstawieniem pewnych możliwości ich udoskonalania w celu uzyskania algorytmów szybszych, które mają mniejszą złożoność obliczeniową. Do takich algorytmów należą m.in. wypisywanie dzielników, znajdowanie NWD oraz NWW dwóch lub większej ilości liczb, rozkład danej liczby naturalnej na czynniki pierwsze, sprawdzanie, czy dana liczba naturalna jest pierwsza, wypisywanie listy liczb pierwszych, sprawdzanie czy dana liczba jest doskonała, wypisywanie listy liczb doskonałych, wypisywanie par liczb zaprzyjaźnionych, a także odczytywanie liczb zapisanych w innym systemie liczenia oraz zapisywanie liczb w systemie o danej podstawie.

WYPISYWANIE DZIELNIKÓW

Już w szkole podstawowej uczniowie wypisują dzielniki podanej liczby. Problem nie wydaje się trudny dla liczb małych, jednak dla większych liczb staje się skomplikowany nawet dla dorosłych ludzi i w celu jego rozwiązania wykorzystujemy często komputer. Na poprzednim wykładzie przedstawiony został prosty algorytm rozwiązujący ten problem. Dla małych liczb program działa bardzo szybko, dla większych jego działanie jest wolne. Dzieje się tak dlatego, że sprawdzamy po kolei wszystkie liczby począwszy od 1 do liczby n. Okazuje się, że jeśli dzielniki będziemy wypisywać parami (np. dla liczby 40: $1, 40, 2, 20, 4, 10, 5, 8$), to możemy sprawdzać dzielniki tylko do liczby całkowitej nie większej od $\sqrt{n}$, co znacznie poprawia jego szybkość, otrzymujemy złożoność rzędu $O(\sqrt{n})$ zamiast $O(n)$. Na przykład dla liczby 1000000 wystarczy sprawdzić 1000, a nie 1000000 dzielników.

OBLICZANIE NWW

Kolejnym problemem jest znajdowanie NWW dwóch lub większej ilości liczb naturalnych. W szkole często wykorzystuje się do tego rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze. Jednak znajdowanie NWW może być oparte na algorytmie nie wykorzystującym tego rozkładu. Algorytm taki jest szybszy, a jego idea była również przedstawiona na poprzednim wykładzie.Zauważmy, że ta sama idea może mieć zastosowanie przy obliczaniu NWW większej ilości liczb. Jedną z tych liczb (najlepiej największą, ale trzeba tu stosować wówczas algorytmy sortujące) mnożymy przez kolejne dodatnie liczby naturalne do momentu, aż uzyskany iloczyn będzie podzielny przez wszystkie pozostałe liczby. Możemy też napisać program rekurencyjny, ponieważ $NWW(a, b, c) = NWW(NWW(a, b), c)$.

OBLICZANIE NWD

Następny problem to znajdowanie NWD dwóch lub większej ilości liczb naturalnych. W szkole również wykorzystuje się do tego rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze. Znajdowanie NWD może być jednak również dużo łatwiejsze. Możemy na przykład od mniejszej z liczb odejmować liczbę jeden dopóki większa liczba nie podzieli się przez uzyskaną różnicę i jednocześnie różnica ta nie będzie dzielnikiem mniejszej z liczb.

OBLICZANIE NWD - ALGORYTM EUKLIDESA

Innym ze znanych sposobów jest na przykład algorytm Euklidesa wykorzystujący jedynie operację odejmowania przedstawiony na poprzednim wykładzie. Ideę tę również możemy rozszerzyć dla większej ilości liczb lub wykorzystać rekurencję, ponieważ dla największego wspólnego dzielnika mamy również zależność: $NWD(a, b, c) = NWD(NWD(a, b), c)$.

LICZBY PIERWSZE

Problem znajdowania liczb pierwszych jest problemem bardzo ważnym z punktu widzenia matematyki i informatyki. Liczby pierwsze są bowiem wykorzystywane m.in. w kryptografii (szyfrowanie danych) oraz mają wiele innych zastosowań. Test sprawdzania, czy dana liczba jest pierwsza może być oparty na przykład o algorytm omówiony na poprzednim wykładzie. Program ten można przyspieszyć, szukając dzielników tylko do liczby całkowitej nie większej od $\sqrt{n}$. Daje to złożoność rzędu $O(\sqrt{n})$ zamiast liniowej $O(n)$.

LICZBY DOSKONAŁE

LICZBA DOSKONAŁA - DEFINICJA

Liczbą doskonałą nazywamy liczbę naturalną, która jest równa sumie mniejszych od siebie dzielników.

Liczby doskonałe to wielka zagadka teorii liczb, ponieważ:

1. Nie wiadomo, czy liczb doskonałych jest skończenie czy nieskończenie wiele
2. Wszystkie znalezione do tej pory liczby doskonałe są parzyste, nie wiadomo czy istnieje nieparzysta liczba doskonała
3. Nie ma żadnego efektywnego algorytmu znajdowania liczb doskonałych, istnieje jednak związek pomiędzy liczbami doskonałymi i pewnymi liczbami pierwszymi (dokładniej liczbami pierwszymi Mersene'a, czyli liczbami pierwszymi, które da się przedstawić w postaci $1 + 2 + \ldots + 2^n$)

Oto kilka znanych liczb doskonałych:
$6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328.$

LICZBY ZAPRZYJAŹNIONE - DEFINICJA

Dwie różne liczby naturalne nazywamy zaprzyjaźnionymi, jeśli jedna z nich jest równa sumie dzielników drugiej liczby mniejszych od niej i na odwrót.

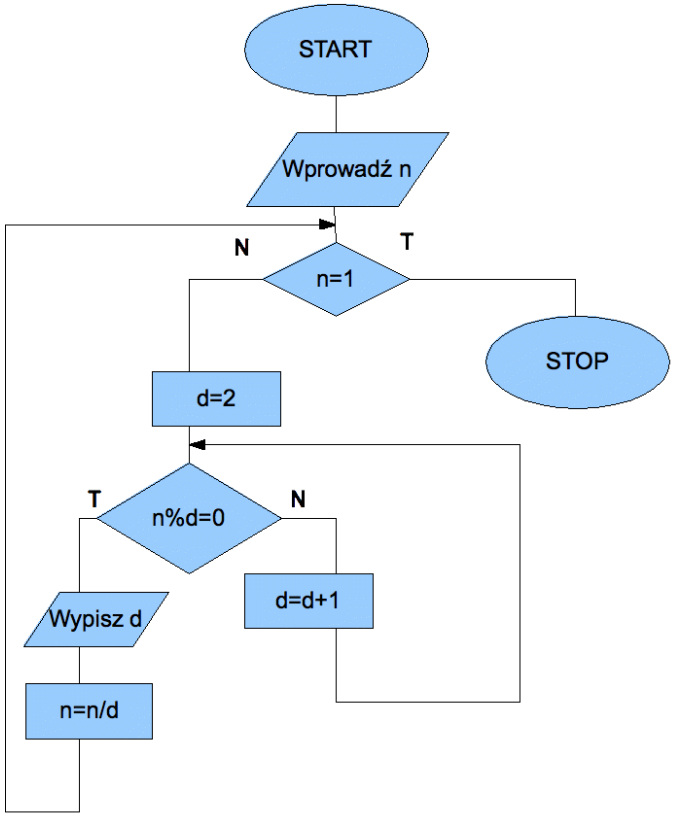
Z liczbami zaprzyjaźnionymi jest podobny problem. Nie wiadomo, czy takich par liczb jest nieskończenie wiele i czy istnieją liczby zaprzyjaźnione, z których jedna byłaby parzysta, a druga nieparzysta.
Oto przykłady takich par liczb:

LICZBY ZAPRZYJAŹNIONE

220 i 284 1184 i 1210 2620 i 2924 5020 i 5564 6232 i 6368
10744 i 10856 12285 i 14595

ROZKŁAD LICZBY NATURALNEJ NA CZYNNIKI PIERWSZE

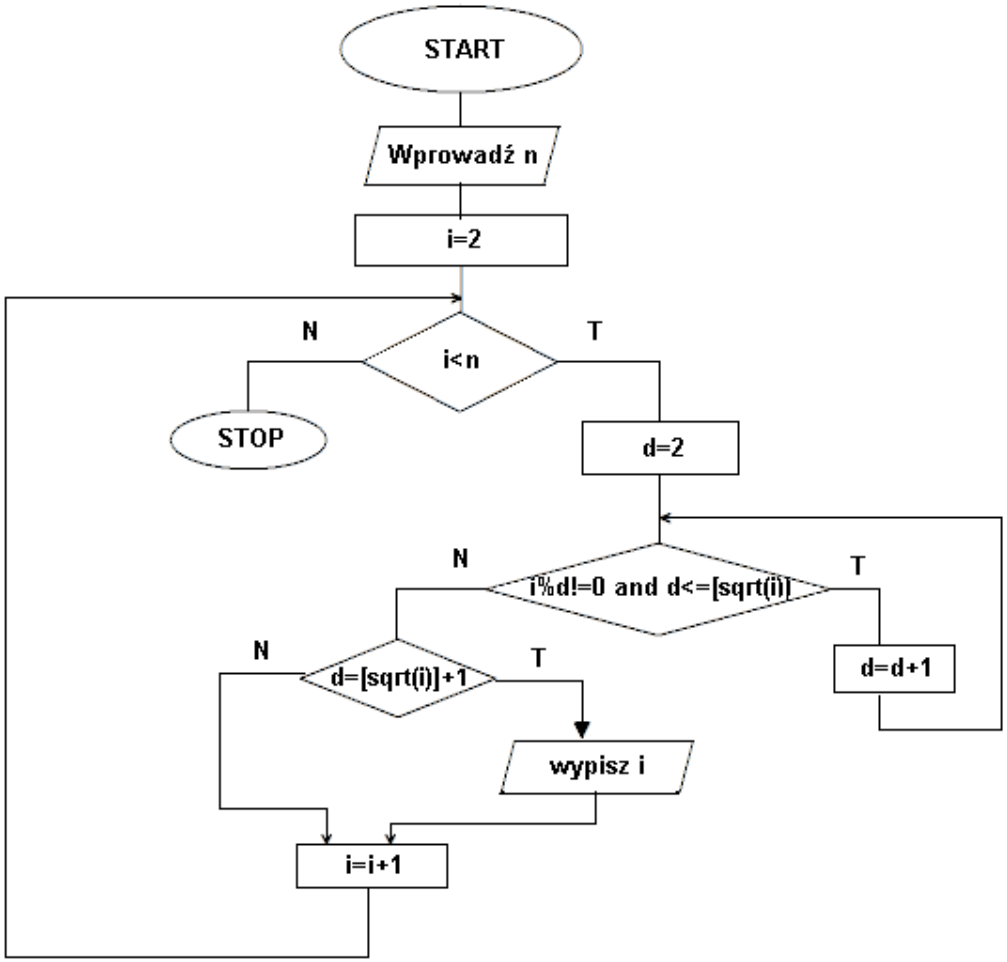
Omówimy algorytm rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Przedstawiony poniżej algorytm opiera się o intuicyjne rozumienie rozkładu i rozkład ten jest wykonywany w oparciu o dzielenie przez kolejne liczby naturalne. Na przykład $60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.



WYPISYWANIE LISTY LICZB PIERWSZYCH

Zajmiemy się teraz algorytmami, za pomocą których wypisujemy liczby pierwsze. Na początek oprzemy się na znanym już nam algorytmie sprawdzania, czy liczba jest pierwsza i na jego bazie zbudujemy algorytm, który wypisuje liczby pierwsze mniejsze od wprowadzonej przez użytkownika liczby n. Algorytm wygląda następująco:

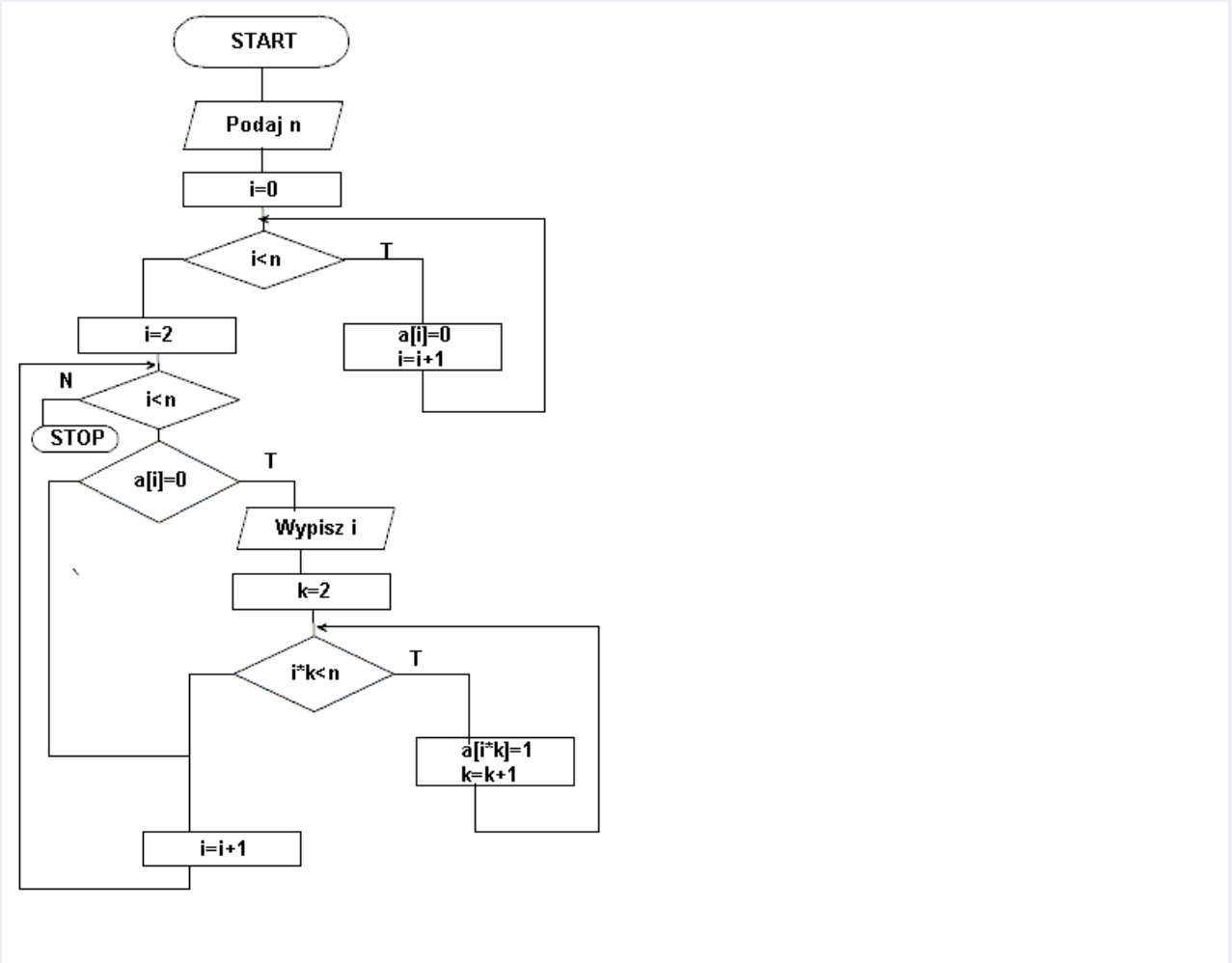
WYPISYWANIE LICZB PIERWSZYCH - ALGORYTM



WYPISYWANIE LISTY LICZB PIERWSZYCH - SITO ERATOSTENESA

Sito Eratostenesa jest jednym z najprostszych algorytmów, za pomocą których znajdujemy liczby pierwsze. Polega on na przechodzeniu przez tablicę liczb naturalnych (od dwójki) i wykreślaniu wielokrotności liczb, które w poprzednich krokach nie były wykreślone. Liczby które pozostaną nieskreślone to liczby pierwsze. Do konstrukcji tego algorytmu najlepiej wykorzystać tablice (listy). Algorytm wygląda następująco:

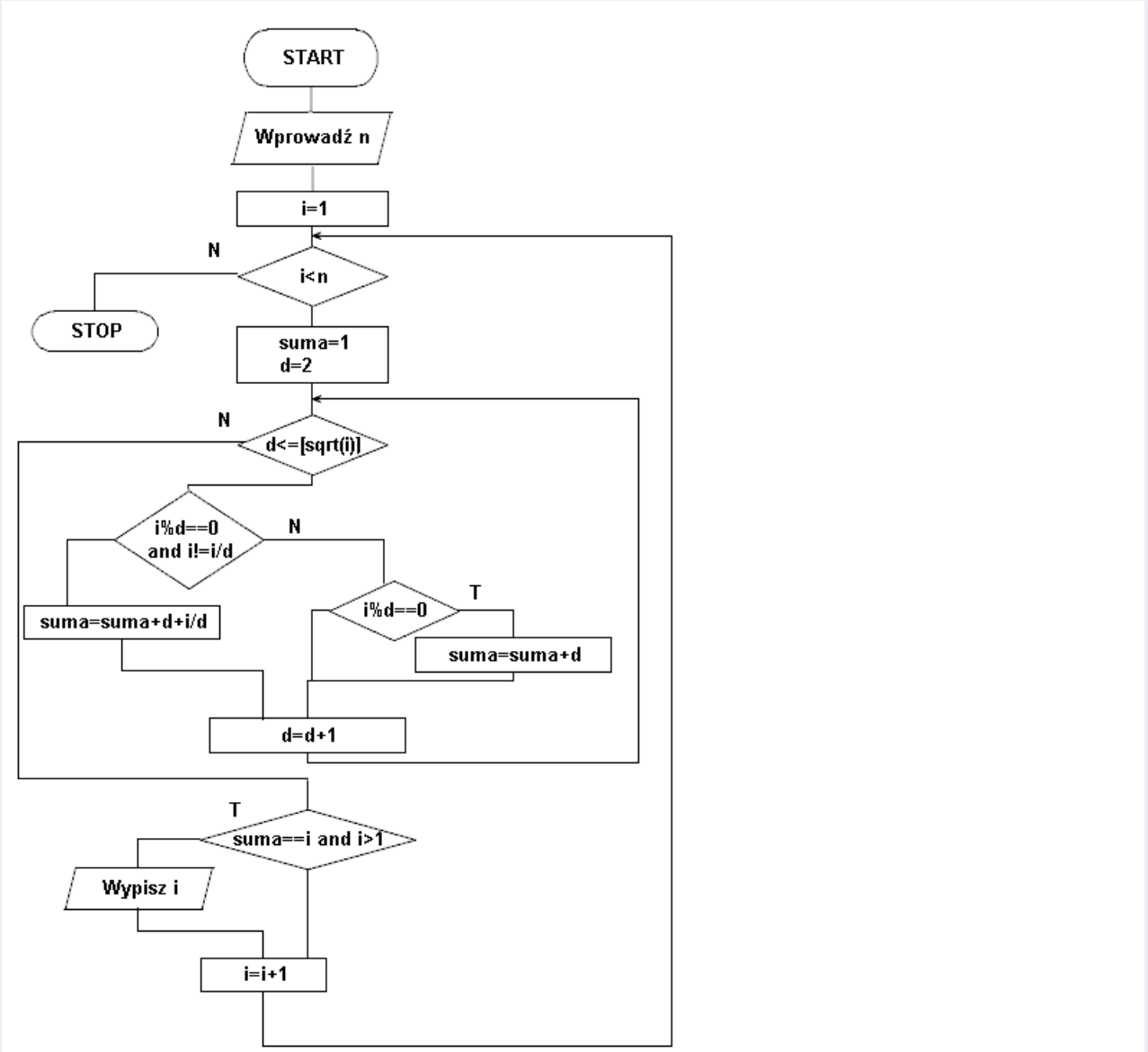
WYPISYWANIE LICZB PIERWSZYCH - ALGORYTM ERATOSTENESA



WYPISYWANIE LISTY LICZB DOSKONAŁYCH

Omówiony został wcześniej algorytm sprawdzania, czy dana liczba jest doskonała. Na bazie tego algorytmu można skonstruować algorytm wypisywania listy liczb doskonałych mniejszych od wprowadzonej przez użytkownika liczby n. Algorytm wygląda następująco:

WYPISYWANIE LICZB DOSKONAŁYCH - ALGORYTM



ALGORYTM HORNERA

W matematyce i innych naukach przyrodniczych mamy często do czynienia z obliczaniem wartości wielomianu w danym punkcie. Na przykład, gdy dany jest wielomian $W(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 6$ i chcemy obliczyć jego wartość w punkcie $x = 2$ obliczamy: $W(2) = 4 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 6 =$ $4 \cdot 16 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 10 + 6 = 64 + 24 + 8 + 16 = 112$. Jednak taki sposób obliczania wartości wielomianu nie jest najbardziej szybki i efektywny, gdyż musimy wykonać wiele mnożeń (w naszym przykładzie aż $10!$, ponieważ obliczanie potęg również jest obliczaniem odpowiednich iloczynów). Dla wielomianów o dużych stopniach prowadzi to do długich i żmudnych obliczeń zawierających setki mnożeń, co nawet w przypadku obliczeń komputerowych może prowadzić do długiego działania programów, wykorzystujących obliczanie wartości wielomianów. Istnieje sposób bardziej efektywny, wykorzystujący algorytm Hornera, który omówimy teraz bardziej szczegółowo.

ALGORYTM HORNERA

Przedstawmy nasz wielomian w trochę inny sposób (zaczynając od najniższych potęg):

$$W(x) = 6 + 5x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 = 6 + x(5 + 2x + 3x^2 + 4x^3) =$$

$$= 6 + x(5 + x(2 + 3x + 4x^2)) = 6 + x(5 + x(2 + x(3 + 4x)))$$

Taki sposób przedstawienia wielomianu powoduje, że mamy do czynienia tylko z 4 mnożeniami (dodawań jest tyle samo). Każdy wielomian można doprowadzić do takiej postaci, a sposób obliczania wartości wielomianu w oparciu o taką jego postać nazywa się algorytmem Hornera.

ALGORYTM HORNERA

Pokażemy teraz jak łatwo w oparciu o ten algorytm obliczyć wartość wielomianu $W(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 6$ np. dla $x = 2$. Obliczenia przedstawimy w tabeli:

krok	1	2	3	4
wartość	4*2+3=11	11*2+2=24	24*2+5=53	53*2+6=112

Mało tego, za pomocą tego algorytmu możemy wykonywać szybkie dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$. Tutaj mamy:

$$(4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 6) : (x - 2) = 4x^3 + 11x^2 + 24x + 53 \; R \; 112$$

Inaczej można zapisać to tak:

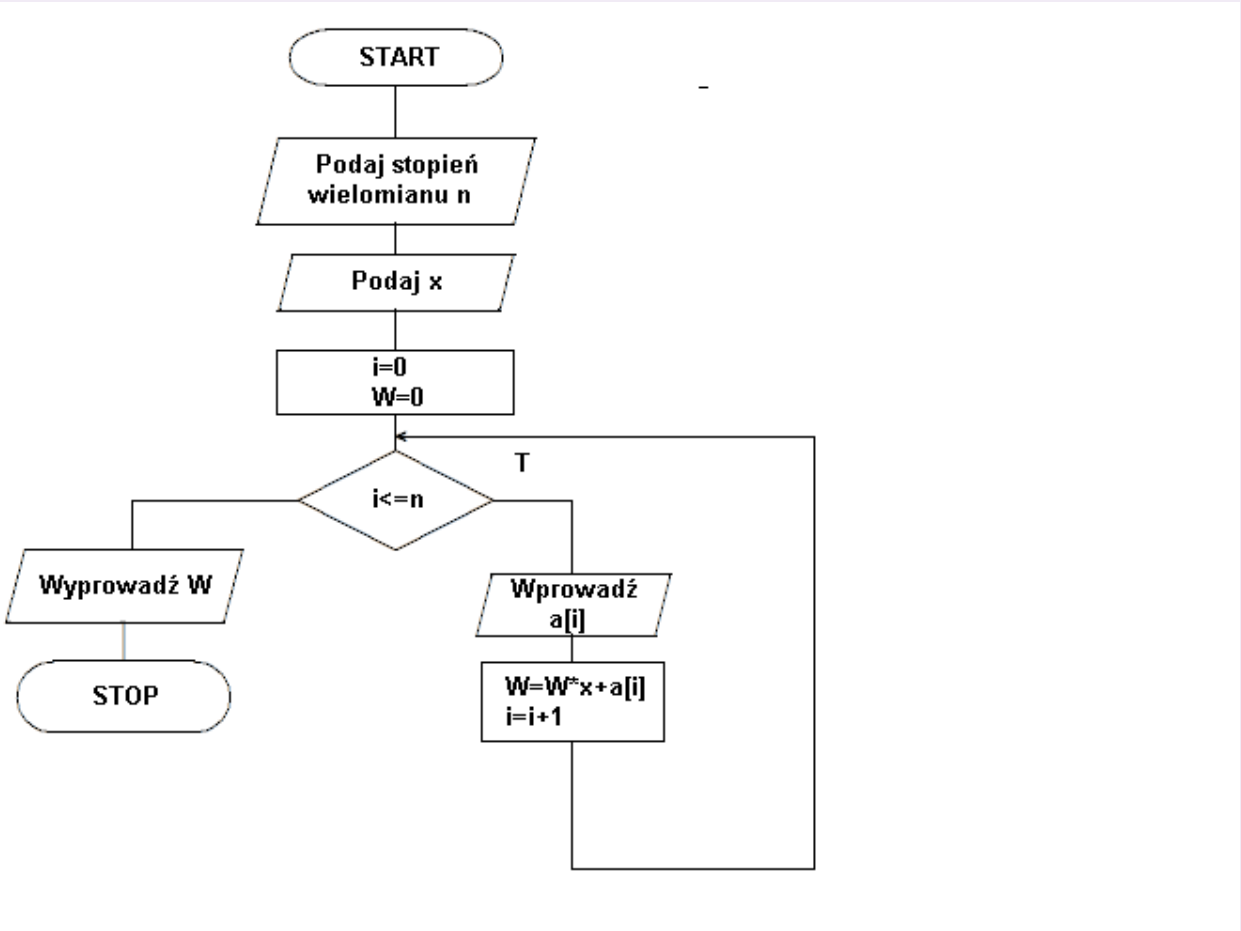
$$4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 6 = (4x^3 + 11x^2 + 24x + 53)(x - 2) + 112$$

Albo bardziej formalnie:

$$\frac{4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 6}{x - 2} = 4x^3 + 11x^2 + 24x + 53 + \frac{112}{x - 2}$$

Przejdziemy teraz do samego algorytmu Hornera i jego ilustracji z użyciem schematu blokowego. Użyjemy algorytmu iteracyjnego wykorzystującego tablice.

ALGORYTM HORNERA



ZASTOSOWANIE ALGORYTMU HORNERA - ZAMIANA LICZBY ZAPISANEJ W INNYM SYSTEMIE LICZENIA NA SYSTEM DZIESIĘTNY

Algorytm Hornera można wykorzystać do odczytywania liczby zapisanej w innym systemie liczenia. Rozpatrzmy przykład:

$$1234_{(5)} = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 125 + 50 + 15 + 4 = 194$$

Zauważmy, że jest to również wartość wielomianu $1x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ w punkcie $x = 5$.